Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Rakende grafieken?

1 maximumscore 5

- Er moet gelden $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$ — 1
- $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $g'(x) = \frac{1}{e} \cdot x$ — 1
- Uit $f'(x) = g'(x)$ volgt $x = \sqrt{e}$ ($x = -\sqrt{e}$ voldoet niet) — 1
- $f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}$ en $g\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}$ — 1
- ($f\left(\sqrt{e}\right) = g\left(\sqrt{e}\right)$ en $f'\left(\sqrt{e}\right) = g'\left(\sqrt{e}\right)$, dus) de grafieken van f en g raken elkaar — 1

Bewegen over een lijn

2 maximumscore 4

- $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{PQ}$ (of $\overrightarrow{OP'}$) $= \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{2}p + 3\right) \\ p \end{pmatrix}$ $\left(= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ p \end{pmatrix}\right)$ — 1
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}p - 3 \\ \frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$ — 1
- Het stelsel $\begin{cases} x = 1\frac{1}{2}p - 3 \\ y = \frac{1}{2}p + 3 \end{cases}$ geeft voor m de vergelijking $y = \frac{1}{3}x + 4$ — 1

of

- De punten $P_1(0, 3)$ en $P_2(6, 0)$ liggen op k — 1
- Dit geeft $P_1'(-3, 0)$ en $P_2'(0, 6)$ — 1
- Dit geeft $Q_1(-3, 3)$ en $Q_2(6, 6)$ — 1
- Hieruit volgt voor m de vergelijking $y = \frac{1}{3}x + 4$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Een derde cirkel

3 maximumscore 4

- In driehoek $M_1M_2M_3$ geldt
  $(r+2)^2 = 8^2 + (r+6)^2 - 2\cdot 8\cdot (r+6)\cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$ — 1
- $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \dfrac{(r+2)^2 - 8^2 - (r+6)^2}{-2\cdot 8\cdot (r+6)}$ — 1
- De teller herleiden tot $-8r-96$ — 1
- De rest van de herleiding tot $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \dfrac{r+12}{2r+12}$ — 1

4 maximumscore 3

- ($\dfrac{r+12}{2r+12} = \dfrac{1+\frac{12}{r}}{2+\frac{12}{r}}$, dus) $\dfrac{r+12}{2r+12}$ nadert tot $\frac{1}{2}$ — 2
- ($\cos(\angle M_1M_2M_3)$ nadert tot $\frac{1}{2}$,) dus de limiet is $60°$ — 1

of

- (de termen 12 in teller en noemer zijn voor grote waarden van r verwaarloosbaar, dus) $\dfrac{r+12}{2r+12}$ nadert tot $\frac{1}{2}$ — 2
- ($\cos(\angle M_1M_2M_3)$ nadert tot $\frac{1}{2}$,) dus de limiet is $60°$ — 1

of

- Als r onbegrensd toeneemt, nadert c_3 tot een gemeenschappelijke raaklijn aan c_1 en c_2 — 1
- Een redenering of berekening waaruit volgt dat deze raaklijn de x-as in $(-6,0)$ snijdt, dus $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{2}{4}$ (of $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{6}{12}$) — 1
- ($\cos(\angle M_1M_2M_3)$ nadert tot $\frac{1}{2}$,) dus de limiet is $60°$ — 1

5 **maximumscore 6**

- De stelling van Pythagoras in driehoek M_1PM_3 geeft
  $(r+2)^2 = r^2 + (-2-a)^2$, met a de x-coördinaat van M_3 — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek M_2PM_3 geeft
  $(r+6)^2 = r^2 + (6-a)^2$ — 1
- Dit geeft $4r = a^2 + 4a$ en $12r = a^2 - 12a$ — 1
- Hieruit volgt $3(a^2 + 4a) = a^2 - 12a$ — 1
- Dus $2a^2 + 24a = 0$, dus $a(a+12) = 0$, dus $a = -12$ ($a = 0$ voldoet niet) — 1
- Invullen in een eerder gevonden vergelijking met r en a geeft $r = 24$ — 1

of

- $\cos(\angle PM_2M_3) = \cos(\angle M_1M_2M_3)$ — 1
- $\dfrac{M_2P}{r+6} = \dfrac{r+12}{2r+12}$ — 1
- Dit geeft $M_2P = \frac{1}{2}r + 6$ — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek M_2PM_3 geeft
  $(\frac{1}{2}r+6)^2 + r^2 = (r+6)^2$ (of in driehoek M_1PM_3: $(\frac{1}{2}r-2)^2 + r^2 = (r+2)^2$) — 1
- Herleiden tot een kwadratische vergelijking zonder haakjes — 1
- Hieruit volgt $r = 24$ ($r = 0$ voldoet niet) — 1

of

- De stelling van Pythagoras in driehoek M_2PM_3 geeft
  $r^2 + M_2P^2 = (r+6)^2$ — 1
- $M_2P = \sqrt{12r+36}$ — 1
- $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \cos(\angle PM_2M_3)$ — 1
- $\dfrac{r+12}{2r+12} = \dfrac{\sqrt{12r+36}}{r+6}$, dus $2\sqrt{12r+36} = r+12$ — 1
- Herleiden tot een kwadratische vergelijking zonder haakjes — 1
- Hieruit volgt $r = 24$ ($r = 0$ voldoet niet) — 1

of

- De stelling van Pythagoras in driehoek M_1PM_3 geeft
  $(r+2)^2 = r^2 + PM_1{}^2$ — 1
- Hieruit volgt $PM_1 = \sqrt{4r+4}$ — 1
- Invullen in $(r+6)^2 = r^2 + (PM_1 + 8)^2$ geeft $(r+6)^2 = r^2 + (\sqrt{4r+4} + 8)^2$ — 1
- Hieruit volgt $12r + 36 = 4r + 68 + 16\sqrt{4r+4}$ — 1
- Herleiden tot een kwadratische vergelijking zonder haakjes — 1
- Hieruit volgt $r = 24$ ($r = 0$ voldoet niet) — 1

Een achtbaan

6 maximumscore 5

- De afgeleide van $\sin(2t)$ is $2\cos(2t)$ 1
- $x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t)$ en $y'(t) = -2\sin(t)$ 1
- Voor de snelheid v op tijdstip t geldt
  $v(t) = \sqrt{(-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 + (-2\sin(t))^2}$ 1
- Beschrijven hoe het maximum van v kan worden bepaald 1
- De maximale snelheid is 3,6 (m/s) 1

Voor vraag moeten de twee scorepunten van de **laatste twee antwoordelementen** altijd worden toegekend, ongeacht of er wel of geen antwoord gegeven is, en ongeacht het gegeven antwoord.
NB: de eerste drie antwoordelementen moeten beoordeeld worden volgens het beoordelingsmodel.

7 maximumscore 5

- $2\cos(t) = \cos(t) + \sin(2t)$ geeft $2\cos(t) = \cos(t) + 2\sin(t)\cos(t)$ 1
- $\cos(t) - 2\sin(t)\cos(t) = 0$ 1
- $\cos(t)(1 - 2\sin(t)) = 0$, dus $\sin(t) = \frac{1}{2}$ ($\cos(t) = 0$ voldoet niet, want dat geeft O) 1
- Dit geeft $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ 1
- De beweging duurt $\frac{2}{3}\pi$ (s) 1

of

- $2\cos(t) = \cos(t) + \sin(2t)$ geeft $\sin(2t) = \cos(t)$, dus $\sin(2t) = \sin(\frac{1}{2}\pi - t)$ 1
- $2t = \frac{1}{2}\pi - t + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) of $2t = \pi - (\frac{1}{2}\pi - t) + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ (met k geheel) of $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Dit geeft $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ (want $t = 1\frac{1}{2}\pi$ en $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ geven O) 1
- De beweging duurt $\frac{2}{3}\pi$ (s) 1

Vraag	Antwoord	Scores

8 maximumscore 4

- De helling van lijnstuk PQ op tijdstip t is gelijk aan $\dfrac{2\cos(t+\pi)-2\cos(t)}{\cos(t+\pi)+\sin(2(t+\pi))-(\cos(t)+\sin(2t))}$ 1
- $\sin(2(t+\pi))=\sin(2t+2\pi)=\sin(2t)$ 1
- De helling is gelijk aan $\dfrac{2\cos(t+\pi)-2\cos(t)}{\cos(t+\pi)+\sin(2t)-\cos(t)-\sin(2t)}=\dfrac{2\cos(t+\pi)-2\cos(t)}{\cos(t+\pi)-\cos(t)}$ 1
- Dit is (voor elke waarde van t met $\cos(t)\neq 0$) gelijk aan ($\dfrac{2\left(\cos(t+\pi)-\cos(t)\right)}{\cos(t+\pi)-\cos(t)}=$) 2 (en dus onafhankelijk van t) 1

of

- De helling van lijnstuk PQ op tijdstip t is gelijk aan $\dfrac{2\cos(t+\pi)-2\cos(t)}{\cos(t+\pi)+\sin(2(t+\pi))-(\cos(t)+\sin(2t))}$ 1
- $\sin(2(t+\pi))=\sin(2t+2\pi)=\sin(2t)$ 1
- $\cos(t+\pi)=-\cos(t)$, dus de helling is gelijk aan $\dfrac{-2\cos(t)-2\cos(t)}{-\cos(t)+\sin(2t)-\cos(t)-\sin(2t)}=\dfrac{-2\cos(t)-2\cos(t)}{-\cos(t)-\cos(t)}$ 1
- Dit is (voor elke waarde van t met $\cos(t)\neq 0$) gelijk aan ($\dfrac{-4\cos(t)}{-2\cos(t)}=$) 2 (en dus onafhankelijk van t) 1

Een gebroken functie

9 maximumscore 4

- De vergelijking $\frac{5}{4x-6}=x-3\frac{1}{2}$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $x^2-5x+4=0$ 1
- Herleiden tot $(x-1)(x-4)=0$ geeft $x=1$ of $x=4$ 1
- De coördinaten van punt B zijn $(4, \frac{1}{2})$ 1

10 maximumscore 5

- De inhoud van het linkerdeel is gelijk aan $\pi\cdot\int_0^1\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2\,\mathrm{d}x$ 1
- De inhoud van het rechterdeel is gelijk aan $\pi\cdot\int_1^{3\frac{1}{2}}\left(x-3\frac{1}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2$ is $\frac{-25}{4(4x-6)}$ 1
- Een primitieve van $\left(x-3\frac{1}{2}\right)^2$ is $\frac{1}{3}\left(x-3\frac{1}{2}\right)^3$ 1
- De inhoud is $(2\frac{1}{12}\pi+5\frac{5}{24}\pi=)\ 7\frac{7}{24}\pi$ 1

of

- De inhoud van het linkerdeel is gelijk aan $\pi\cdot\int_0^1\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2$ is $\frac{-25}{4(4x-6)}$ 1
- De inhoud van het rechterdeel is gelijk aan de inhoud van de kegel die ontstaat door lijn k van $x=1$ tot $x=3\frac{1}{2}$ om de x-as te wentelen 1
- De hoogte van de kegel is $2\frac{1}{2}$, de straal van het grondvlak G is $(\left|-2\frac{1}{2}\right|)=2\frac{1}{2}$, de inhoud van de kegel is te berekenen met $\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$ 1
- De inhoud is $(2\frac{1}{12}\pi+5\frac{5}{24}\pi=)\ 7\frac{7}{24}\pi$ 1

11 maximumscore 4

- Er geldt $g(x) = \frac{5}{4x-6} + a$ en de grafiek van g heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x = 1\frac{1}{2}$ — 1
- De horizontale asymptoot van de grafiek van g heeft vergelijking $y = a$ — 1
- De verticale asymptoot van de grafiek van de inverse functie van g (ontstaan door spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$) is dus de lijn met vergelijking $x = a$ — 1
- ($\left|a - 1\frac{1}{2}\right| = 4$, dus) $a = -2\frac{1}{2}$ of $a = 5\frac{1}{2}$ — 1

of

- Er geldt $g(x) = \frac{5}{4x-6} + a$ en de grafiek van g heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x = 1\frac{1}{2}$ — 1
- Voor de grafiek van de inverse functie van g geldt $y = \frac{5}{4(x-a)} + 1\frac{1}{2}$ — 1
- De verticale asymptoot van de grafiek van de inverse functie van g heeft vergelijking $x = a$ — 1
- ($\left|a - 1\frac{1}{2}\right| = 4$, dus) $a = -2\frac{1}{2}$ of $a = 5\frac{1}{2}$ — 1

Brandwerendheid van een deur

12 maximumscore 5

- $T'_{\text{nat}}(t) = 1050 \cdot \mathrm{e}^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} \cdot \left(\dfrac{-2\ln(t)}{t} + \dfrac{6}{t}\right)$ 2
- $T'_{\text{nat}}(t) = 0$ geeft $\dfrac{-2\ln(t)}{t} + \dfrac{6}{t} = 0$ 1
- Dit geeft $\ln(t) = 3$ 1
- De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot \mathrm{e}^0 = 1070$ (°C) 1

of

- De herleiding tot $20 + 1050 \cdot \mathrm{e}^{-(\ln(t)-3)^2}$ 2
- Dit is maximaal als $-(\ln(t)-3)^2$ maximaal is 1
- Dat is het geval als $\ln(t) = 3$ 1
- De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot \mathrm{e}^0 = 1070$ (°C) 1

of

- T_{nat} is maximaal als $-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9$ maximaal is 2
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9\right) = \dfrac{-2\ln(t)}{t} + \dfrac{6}{t}$ 1
- $\dfrac{-2\ln(t)}{t} + \dfrac{6}{t} = 0$ geeft $\ln(t) = 3$ 1
- De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot \mathrm{e}^0 = 1070$ (°C) 1

Opmerking
Als in het eerste antwoordalternatief voor $T'_{\text{nat}}(t)$ de uitdrukking $1050 \cdot \mathrm{e}^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} \cdot \left(-2\ln(t) + \dfrac{6}{t}\right)$ wordt gegeven, dan één van de twee scorepunten voor de afgeleide functie toekennen.

13 maximumscore 4

- De vergelijking $20 + 345 \cdot \log(8t + 1) = 300$ moet worden opgelost 1
- $\log(8t+1) = \frac{280}{345}$ (of $0{,}8116$) 1
- $8t + 1 = 10^{\frac{280}{345}}$ (of $6{,}4803$) 1
- Het antwoord: $t \approx 0{,}685$ (minuten) 1

14 **maximumscore 7**

- De oppervlakte van het grijze vlakdeel in figuur 3 is $\int_{0,69}^{30} \left(20 + 345 \cdot \log(8t+1) - 300\right) \mathrm{d}t$ 1
- Deze oppervlakte is (ongeveer) 11 929 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $T_{\text{nat}}(t) = 300$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $t \approx 6{,}36$ (of nauwkeuriger) 1
- De oppervlakte bij de natuurlijke brand is $\int_{6,36}^{30} (20 + 1050 \cdot \mathrm{e}^{-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9} - 300)\,\mathrm{d}t$ 1
- Deze oppervlakte is (ongeveer) 14 242 1
- ($14\,242 > 11\,929$, dus) de deur houdt tijdens de natuurlijke brand niet minstens 30 minuten stand 1

of

- De oppervlakte van het grijze vlakdeel in figuur 3 is $\int_{0,69}^{30} \left(20 + 345 \cdot \log(8t+1) - 300\right) \mathrm{d}t$ 1
- Deze oppervlakte is (ongeveer) 11 929 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $T_{\text{nat}}(t) = 300$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $t \approx 6{,}36$ (of nauwkeuriger) 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\int_{6,36}^{x} (20 + 1050 \cdot \mathrm{e}^{-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9} - 300)\,\mathrm{d}t = 11\,929$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $x \approx 26$ 1
- ($26 < 30$, dus) de deur houdt tijdens de natuurlijke brand niet minstens 30 minuten stand 1

Opmerkingen

– *In plaats van de ondergrens 0,69 van de eerste integraal mag ook de nauwkeuriger waarde gebruikt worden die in de vorige vraag is berekend.*

– *Als in één of beide integralen de term 300 is vergeten, voor deze vraag maximaal 6 scorepunten toekennen.*

Perforatie

15 maximumscore 6

- $(x^2+1)(x-2)=0$ geeft $x=2$ (want $x^2+1=0$ heeft geen oplossing) 1
- $x=2$ invullen in $px^2+4px+6$ geeft $4p+8p+6$ ($=12p+6$) 1
- $12p+6=0$ geeft $p=-\frac{1}{2}$ (dus voor $p=-\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van f_p een perforatie) 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}$ 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}$ (voor $x\neq 2$) 1
- De coördinaten van de perforatie zijn $\left(2,-\frac{4}{5}\right)$ (want $\lim\limits_{x\to 2} f_{-\frac{1}{2}}(x)=-\frac{4}{5}$) 1

of

- Herleiden van de teller tot $(x-2)(px+6p)+12p+6$ 2
- $12p+6=0$ geeft $p=-\frac{1}{2}$ (dus voor $p=-\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van f_p een perforatie) 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}$ 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}$ (voor $x\neq 2$) 1
- De coördinaten van de perforatie zijn $\left(2,-\frac{4}{5}\right)$ (want $\lim\limits_{x\to 2} f_{-\frac{1}{2}}(x)=-\frac{4}{5}$) 1

of

- $px^2+4px+6=0$ geeft $x=\dfrac{-4p\pm\sqrt{16p^2-24p}}{2p}$ 1
- $(x^2+1)(x-2)=0$ geeft $x=2$ (want $x^2+1=0$ heeft geen oplossing) (dus er is een perforatie bij $x=2$), dus er moet gelden $\dfrac{-4p\pm\sqrt{16p^2-24p}}{2p}=2$ 1
- Dit geeft $p=-\frac{1}{2}$ 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}$ 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}$ (voor $x\neq 2$) 1
- De coördinaten van de perforatie zijn $\left(2,-\frac{4}{5}\right)$ (want $\lim\limits_{x\to 2} f_{-\frac{1}{2}}(x)=-\frac{4}{5}$) 1